代数幾何学シンポジウム記録
1980年度 pp.21-34

Cancellation problem

富山大 教育 浅沼照雄

§1. 序

ここでいう cancellation problem とは次の問題を意味する。

問題 1 体 k 上の affine algebraic varieties V および W が $V \times \mathbb{A}^n \cong W \times \mathbb{A}^n$ をみたせば $V \cong W$ がなりたつか? すなわち affine n-space $\mathbb{A}^n$ が cancel できるか?

環論になおせば

問題 2. A と B を体 k 上 affine domains で $A[X_1, \dots, X_n] \cong B[Y_1, \dots, Y_n]$ をみたすとする。このとき $A \cong B$ がなりたつか? ここで $X_1, \dots, X_n$ は不定元, $\cong$ は k-同型を表わす。

次の定義は[1]による。

定義 kを体，Aをk-algebraとする。Aがn-invariantであるとはk-algebra Bおよびk-同型 $\varphi: A[X_1,\dots,X_n]\cong B[X_1,\dots,X_n]$が存在すればつねに$B$は$A$に$k$-同型なることである。特につねに$\varphi(A)=B$がなりたつとき$A$は$n$-strongly invariantであるという。任意の正整数nについてn-invariant (resp. n-strongly invariant) なるとき単にinvariant (resp. strongly invariant) であるという。

この定義によれば問題2は次のように表せる。

問題3. 体k上のaffine domain Aはinvariantであるか？

§2. Curveの場合

定理1. (Abhyankar, Eakin, Heinzer) A を $\dim A=1$ なる affine k-domain, B を k-algebra で $A[X_1,\cdots,X_n]=B[Y_1,\cdots,Y_n]$ をみたすものとする。ここで $Y_1,\cdots,Y_n$ は B 上 algebraically independent な元である。すると $A=B$ 又は A も B も k の A における algebraic closure k' 上1変数多項式環 $k'[X]$ に k'-同型になる。それゆえ A は invariant である。[1]

系. $k=\bar{k}=$代数的閉体, C を affine algebraic curve, W を affine algebraic variety で $C\times\mathbb{A}^n\cong W\times\mathbb{A}^n$ をみたすとする。このとき $C\cong W$ がなりたつ。すなわち curve の cancellation problem はつねになりたつ。

§3. Surface の場合

$\dim A=2$ なる affine k-domain A について考える。このときはのちに示すように invariant でない例が存在する。一般的に与えられた $\dim A=2$ なる affine k-domain A が invariant であるかどう

か，又は strongly invariant であるかどうかを調べるのはきわめて難かしい問題である。(c.f. [11])
そこでここでは A が特に多項式環 $A=R[Z]$ の場合について考えてみよう。まず A が2変数の多項式環の時すなわち $R\cong k[X]$ なるときは次のいちじるしい結果が知られている。

定理2. (宮西，杉江，藤田，上林) k が perfect field ならば2変数多項式環 $A=k[X,Y]$ は invariant である。([5]，[10]，[14])

次に R が多項式環でない時を考える。そのためにまず次の定義を与える。

定義. integral domain D が F-closed であるとは D の quotient field K の元 a が $a^2, a^3, na \in D$ (n はある正整数) をみたせばつねに $a \in D$ なることである。ゆえ D が integrally closed 又は標数 0 なる体を含むときは D は F-closed になる。さて S を quotient field K をもつ任意の integral domain

とする。このとき $S \subset D \subset K$ をみたす最小の F-closed な integral domain D が存在する。これを S の F-closure といい $D = F(S)$ で表わす。ゆえに S が F-closed ならば $S = F(S)$ である。[2].

定義 integral domain D が seminormal であるとは D の quotient field K の元 a が $a^2, a^3 \in D$ ならばつねに $a \in D$ なることである。明らかに D が seminormal ならば F-closed である。とくに D の標数が正ならば seminormal なることと F-closed なることは同値である。(c.f. [4])

定理3 (C. Traverso, Gilmer, Heitmann) integral domain D について $Pic(D[X]) \cong Pic(D)$ なるための必要十分条件は D が seminormal なることである。([6],[12])

なお seminormality については [13] を参照してください。

6

次に strongly invariant については次の定理がなりたつ。

定理 4.（Bhatwadekar）D を strongly invariant k-domain とする。B を integral domain で $D[X_1, \dots, X_n] = B[Y_1, \dots, Y_m]$ をみたすとすると $m \leqq n$ かつ $D \subset B$ がなりたつ。[3]

さて $A = R[Z]$ は $\dim A = 2$ なる affine k-domain であるから R は $\dim R = 1$ なる affine k-domain である。定理 1 より R が多項式環でなければ R は strongly invariant．ゆえに $R[Z, X_1, \dots, X_n] = B[Y_1, \dots, Y_n]$ なる任意の integral domain B について定理 4 より $B \supset R$ がなりたつ．そこで [2] の系 3.21 より次の定理を得る。（Cf. [7]）

定理 5　R を k 上 $\dim R = 1$ なる affine domain で多項式環でないものとする．すると $R[Z, X_1, \dots, X_n] = B[Y_1, \dots, Y_n]$ なる任意の環 B について

7

(a) k の標数 $\mathrm{ch}\,k=0$ のときはある T が存在して $B=R[T]$ と表せる。

(b) $\mathrm{ch}\,k=p>0$ のときはある T が $F(R)[Z,X_1,\dots,X_n]$ に存在して

$$B = R[T^{p^e}, T+a_1T^p+\cdots+a_mT^{mp}]$$

と表せる。ここで $a_i\in F(R)$ で $a_i^{p^e}\in R$ をみたすものとする。$(i=1,\dots,m)$、逆に B が (b) をみたせば $R[Z,X_1]\cong_R B[Y_1]$ がなりたつ。また $B\cong_R R[Z]$ なるための必要十分条件は $a_1,\dots,a_m\in R$ なることである。

定理2および定理5を合わせて次の定理をうる。

定理6 $k=\bar{k}$, C を affine algebraic curve, W を affine algebraic variety で $C\times\mathbb{A}^{n+1}\cong W\times\mathbb{A}^n$ をみたすものとする。このとき

(a) $C\times\mathbb{A}^2\cong W\times\mathbb{A}^1$ がつねになりたつ。

(b) $C\times\mathbb{A}^1\cong W$ がつねになりたつための C の必要十分条件は $\mathrm{ch}\,k=0$ 又は C が seminormal curve なることである。

(c) $W \cong \mathrm{Spec}(B)$とおいたとき(a)をみたすための必要十分条件は $C \cong \mathbb{A}^1$ 又は $C = \mathrm{Spec}(R)$ として B が k-同型を含めて定理5の(a)又は(b)をみたすことである。

§4. 反例.

現在までに知られている invariant でない環の例をあげる。なお X, Y, Z は不定元を表わす。

例1. (Hochster) S を real two sphere すなわち $S = \mathbb{R}[x, y, z]/(x^2+y^2+z^2=1)$ とおく. $\mathbb{R}$ は real field である。 $B = S[t, u, w]/(xt + yu + wz = 0)$ とおけば $S[X, Y, Z] \cong B[Z]$ かつ $S[X, Y] \not\cong B$. ゆえ $S[X, Y]$ は not invariant. [8]. この場合 $S[X,Y]$ は U.F.D で $\dim S[X, Y] = 4$ である。

例2. 定理5(b)によるもの。たとえば $\mathrm{ch}\, k = p$ $A = k[X^2, X^3, Y]$, $B = k[X^2, X^3, Y^p, Y + XY^p]$ とおけば $A[Z] \cong B[Z]$ かつ $A \not\cong B$.

9

例2においては定理5より $\mathrm{ch}\,k=p>0$ という条件が必要である。$\mathrm{ch}\,k=0$ の場合は次の例がある。

例3. $\mathrm{ch}\,k=0$ として

$$A=k[X,\ Y+Y^3,\ (X-1)(X-2)Y,\ (X-1)(X-2)Y^2]$$

$$B=k[X,\ XY+X^3Y^3,\ (X-1)(X-2)Y,\ (X-1)(X-2)Y^2]$$

とおく。すると $A[Z]\cong B[Z]$ かつ $A\not\cong B$

証明 $F=(X-1)(X-2)$ とおく。F と X は互いに素であるから $f,g\in k[X]$ が存在して $X^3f+F^3g=1$。ゆえ $(XY+X^3Y^3)f+(FY)(F^2Y^2)g$ $=XYf+Y^3\in B$。これは Y が B 上 integral であることを示す。また $A\ni Y+Y^3$ であるから Y は A 上 integral でもある。$\tilde{A}$ で A の integral closure (in quotient field) を表わすことにすれば $\tilde{A}=\tilde{B}=k[X,Y]$ がなりたつ。$k[X,Y]$ の principal ideal $(F)=Fk[X,Y]$ を $\mathfrak{N}$ とおけば明らかに $\mathfrak{N}$ は A 及び B の ideal でもあって A と B は

$$A=k[X,\ Y+Y^3]+\mathfrak{N}\ ,\quad B=k[X,XY+X^3Y^3]+\mathfrak{N}$$

と表わされる。ここで $k[X, Y+Y^3]+\mathfrak{A}$ は集合 $\{f+a \,;\, {}^\forall f \in k[X, Y+Y^3],\ {}^\forall a \in \mathfrak{A}\}$ を表している。さて $k[X, Y, Z]/F k[X, Y, Z] = k[x, y, z]$ とおけば $(x-1)(x-2)=0$ であり、z は $k[x]$ 上 algebraically independent である。自然な mapping で $A/\mathfrak{A} \subset \tilde{A}/\mathfrak{A} \subset k[x, y, z]$ と見なすことができる。そこで環の拡大 R'/R について $\mathfrak{L}(R'/R)$ で R'/R の conductor を表わすことにすれば $A/\mathfrak{A} = k[x, y+y^3]$ かつ $\tilde{A}/\mathfrak{A} = k[x, y]$ であるから $\mathfrak{L}((\tilde{A}/\mathfrak{A})/(A/\mathfrak{A})) = (0)$ である。それゆえ $\mathfrak{A} = \mathfrak{L}(\tilde{A}/A)$。同様に $\mathfrak{A} = \mathfrak{L}(\tilde{B}/B)$ を得る。まず $A[Z] \cong B[Z]$ を示す。

$G = -\frac{1}{2}X + \frac{3}{2}$ とおくと $G \cdot X \equiv 1 \pmod{F}$ ゆえ $\bar{\ }$ で $k[X, Y, Z] \to k[x, y, z]$ の image を表わすことにすれば $\bar{G} = x^{-1}$。そこで

$$\begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -G & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおけば $(G_{ij})_{i,j=1,2}$ は invertible で

$$\begin{pmatrix} \bar{G}_{11} & \bar{G}_{12} \\ \bar{G}_{21} & \bar{G}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix}$$ がなりたつ。(See [9])

$k[X, Y, Z]$ の $k[X]$-automorphism Φ を

11

$$\begin{cases}\Phi(Y)=G_{11}Y+G_{12}Z\\ \Phi(Z)=G_{21}Y+G_{22}Z\end{cases}$$ で定義する。すると

$\overline{\Phi(Y)}=xy$, $\overline{\Phi(Z)}=x^{-1}z$ となる。一方 Φ による $A[Z]$ の image は

$$\Phi(A[Z])=\Phi(k[X,Y+Y^3,Z])+\Phi(\mathfrak{F}k[X,Y,Z])$$

であって $\Phi(\mathfrak{F}k[X,Y,Z])=\mathfrak{F}k[X,Y,Z]$ であるから $\Phi(A[Z])=k[X,\Phi(Y)+\Phi(Y)^3,\varphi(Z)]+\mathfrak{N}[Z]$ となる。ゆえ $\overline{\Phi(A[Z])}=k[x,xy+x^3y^3,x^{-1}z]$ $=k[x,xy+x^3y^3,z]$ 。一方 $\overline{B[Z]}=k[x,xy+x^3y^3,z]$ であるから結局 $\overline{\Phi(A[Z])}=\overline{B[Z]}$ がなりたつ。これは $\Phi(A[Z])=B[Z]$ にほかならない, すなわち $A[Z]\cong B[Z]$ が示された。

次に $A\not\cong B$ を示そう。まず Ψ を A から B への k-同型として矛盾を導けばよい。明らかに Ψ は $\tilde{A}$ から $\tilde{B}$ への k-同型すなわち $k[X,Y]$ の k-自己同型に拡張できる。ゆえ Ψ は $k[X,Y]$ の k-自己同型で $\Psi(A)=B$ なるものと仮定してよい。そこで $\mathfrak{N}$ は $\tilde{A}/A$ かつ $\tilde{B}/B$ の conductor であるから $\Psi(\mathfrak{N})=\mathfrak{N}$ すなわち k のある unit element a に対して $\Psi(\mathfrak{F})=a\mathfrak{F}$ と表せる。それゆえ

$(\Phi(X)-1)(\Phi(X)-2)=a(X-1)(X-2)$ がなりたちこのことは $\Phi(X)$ が次数1の $k[X]$ の元であることを示している。ゆえ $\Phi(k[X])=k[X]$ である。一方 $k[\Phi(X),\Phi(Y)]=k[X,Y]$ であるから $k[X,\Phi(Y)]=k[X,Y]$ がなりたち $\Phi(Y)=bY+H$ と表せる。ここで b は k の unit element, H は $k[X]$ の元である。さて $\Phi(A)=B$ であるから $\overline{\Phi(A)}=\overline{B}$ すなわち $k[\overline{\Phi(X)},\overline{\Phi(Y)}+\overline{\Phi(Y)}^3]=k[x, xy+x^3y^3]$ がなりたつ。$xy+x^3y^3$ は reduced ring $k[x]$ 上 algebraically independent かつ $k[\overline{\Phi(X)}]=k[x]$ に注意すれば $\overline{\Phi(Y)}+\overline{\Phi(Y)}^3=\alpha(xy+x^3y^3)+\beta$ と表わせる。ここで α は $k[x]$ の unit element, β は $k[x]$ の元を表している。ゆえに

$$(by+\overline{H})+(by+\overline{H})^3=\alpha(xy+x^3y^3)+\beta$$

がなりたつ。y は $k[x]$ 上 algebraically independent であるからこの両辺の y^2 の係数をくらべて $3b\overline{H}y^2=0$ を得るが, $\mathrm{ch}\, k=0$ かつ $b\in k-(0)$ であるから $\overline{H}=0$. それゆえ $\beta=0$ かつ

$by+b^3y^3=\alpha xy+\alpha x^3y^3$ がなりたつ。ゆえ $b=\alpha x$ かつ $b^3=\alpha x^3$. これより $b^2=x^2$ がなりた

つがこれは $X^2 \equiv b^2 \pmod{F}$ を意味する。これは矛盾である。ゆえに $A \not\cong B$ が示された。

References

1. S. Abhyankar, P. Eakin, W. Heinzer. On the uniqueness of the coefficient ring in a polynomial ring. J. Algebra, 23 (1972) 310 - 342.

2. T. Asanuma, D-algebra stably equivalent to D[Z], Int. Symp. on Algebraic Geometry, Kyoto, (1977), 447 - 476

3. S. M. Bhatwadekar, A note on strongy invariant rings, J. Algebra, 50, (1978) 297 - 298

4. J. W. Brewer, D. L. Costa, K. McCrimmon, Seminormality and root closure, J. Algebra 58 (1979) 217 - 226

5. T. Fujita. On Zariski problem, Proc. Japan. Acad. 55 (1979) 106 - 110

6. R. Gilmer, C. Heitmann, On Pic (R[X]) for R seminormal, J. Pure and Appl. Algebra 16 (1980) 251 - 257

7 E. Hamann, On the R-invariance of R[X], J. Algebra 35 (1976), 1-16.

8. Hochster, Non-uniqueness of coefficient rings in polynomial rings, Proc. Amer. Math. Soc. 34 (1972), 81–82.

9. J. Milnor. Introduction to Algebraic K-theory, Annals. Math. Study 72. Princeton.

10. M. Miyanishi, T. Sugie, Affine surfaces containing cylinderlike open sets, J. Math. Kyoto, 20-1 (1980) 11–42

11. M. Miyanishi, Y. Nakai, Some remarks on strongly invariant rings, Osaka J. Math. 12 (1975), 1–17.

12. C. Traverso, Seminormality and Picard group, Ann, Scuola Norm, Sup. Pisa 24 (1970), 585–595

13. 可換環論の研究. 京都大学数理解析研究所講究録 374.

14. Zariskiの問題, 新・代数セミナー報告集.